

Moduln über linksnoetherschen Ringen, ihr Sockel und Herz,
ihre Charakteristik und ihr Träger

Inaugural - Dissertation

zur

Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Johann Wolfgang Goethe-Universität
zu Frankfurt am Main
vorgelegt von Günter Krause aus Frankfurt/Main

Frankfurt am Main 1967

Mit Genehmigung der Fakultät zum Druck gekürzt. Ein Exemplar
der ungekürzten Arbeit liegt in der Senckenbergischen Biblio-
thek der Universität vor.



Der Dekan: Professor Dr. J. Stauff
1. Gutachter: Professor Dr. Reinhold Baer
2. Gutachter: Privatdozent Dr. Hermann Heineken

Tag der mündlichen Prüfung: 5. Juli 1967

Die Untersuchung unitärer Moduln über linksnoetherschen Ringen mit Einselement zeigt den Zusammenhang von gewissen Untermoduln mit bestimmten den Moduln zugeordneten Klassen von Primidealen des Ringes. Als besondere Untermoduln des R -Linksmoduls M treten dabei das von L.LESIEUR und R.CROISOT (vgl. Journ. de Math. 42 (1963), S. 367-406) eingeführte Herz $C(M)$ und der Sockel $S(M)$ von M in Erscheinung; als Primidealklassen spielen vor allem der Träger $\text{tr}(M)$ und die Charakteristik $\text{ch}(M)$ eine Rolle, wo $\text{tr}(M)$ die Menge aller Primideale bezeichnet, die den Linksannihilator von M in R enthalten, und $\text{ch}(M)$ aus allen sogenannten zu M assoziierten Primidealen besteht, das heißt Idealen, die Linksannihilator eines zyklischen Untermoduls $N \neq 0$ von M und seiner sämtlichen Untermoduln $\neq 0$ sind. Die zur Beschreibung der Zusammenhänge zwischen $S(M)$, $C(M)$, $\text{ch}(M)$ und $\text{tr}(M)$ benutzten Methoden gehen zum großen Teil einmal von der Tatsache aus, daß nach R.BAER (vgl. Bull. Amer. Math. Soc. 46 (1940), S. 800-806) jeder Modul über einem Ring mit Einselement eine bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte maximale wesentliche Erweiterung, die sog. injektive Hülle $E(M)$ von M , besitzt und fußen zum anderen auf Ergebnissen von E.MATLIS (Pac. Journ. of Math. 8 (1958), S. 511-528), Z.PAPP (Publ. Math. Debrecen 6 (1959), S. 311-327) und G.AZUMAYA (Nagoya Math. Journ. 1 (1950), S. 117-124), nach denen ein linksnoetherscher Ring dadurch charakterisiert ist, daß die injektive Hülle

Digitized by the Internet Archive
in 2026

$E(M)$ eines jeden seiner Moduln M direkte Summe von injektiven unzerlegbaren Moduln ist und die Menge $\pi(M)$ der bei einer solchen Zerlegung auftretenden Isomorphie-typen von injektiven unzerlegbaren direkten Summanden eine Invariante des Moduls ist. Damit lässt sich zunächst eine von L.LESIEUR und R.CROISOT angegebene Charakterisierung des Herzens eines Moduls von endlicher GOLDIE-Dimension verallgemeinern, denn es gilt:

SATZ A: Für einen R -Linksmodul M über dem linksnoetherschen Ring R ist das Herz $C(M)$ der Durchschnitt all derjenigen großen Untermoduln N von M , für die $\pi(M/N)$ eine Untermenge von $\pi(M)$ ist.

Bezeichnet man den Modul M als zulässig, wenn jedes zu ihm assoziierte Primideal, das ja die Eigenschaft hat, Linksannihilator eines zyklischen Untermoduls $N \neq 0$ zu sein, auch Linksannihilator sämtlicher Elemente $\neq 0$ von N ist, so werden die zulässigen Moduln eines Ringes durch folgenden Satz charakterisiert:

SATZ B: Für einen Modul M über dem linksnoetherschen Ring R sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) M ist zulässig.

(2) $\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Alle } P \in \text{ch}(M) \text{ sind vollständig prim.} \\ \text{(b) Zu jedem } X \in \pi(M) \text{ existiert ein } P \in \text{ch}(M) \\ \text{mit } X \cong E_R(R/P) \text{ und zu jedem } P \in \text{ch}(M) \\ \text{existiert ein } X \in \pi(M) \text{ mit } X \cong E_R(R/P). \end{array} \right.$

Aus dieser Strukturaussage erhält man mit der obigen Darstellung des Herzens für zulässige Moduln M die Aussage, daß die direkte Summe der Rechtsannihilatoren aller maximalen Elemente von $\text{ch}(M)$ ein Untermodul von $C(M)$ ist und im Fall eines injektiven Moduls M mit $C(M)$ genau dann übereinstimmt, wenn die maximalen unter den Linksidealene der Form $x_e = \{r \in R / rx = 0\}$ mit $0 \neq x \in M$ zu M assoziierte Primideale sind. Daraus folgt, daß für eine nicht torsionsfreie abelsche Gruppe ihr Herz stets gleich ihrem Sockel ist, was es nahelegt, das Verhältnis dieser beiden Untermoduln näher zu untersuchen. Als wesentlicher Schritt auf dem Wege zu Ergebnissen in dieser Richtung ist dabei die folgende Aussage anzusehen:

SATZ C: Für einen linksnoetherschen Ring mit Einselement sind folgende Aussagen äquivalent:

- (1) $\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Alle } R\text{-Linksmoduln sind zulässig.} \\ \text{(b) } \text{tr}(M) = \text{ch}(M) \text{ für alle } R\text{-Linksmoduln } M. \end{array} \right.$
- (2) $\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } R \text{ besitzt die Artin-Rees-Eigenschaft} \\ \quad \text{für Linksideale.} \\ \text{(b) Primideale von } R \text{ sind maximale Links-} \\ \quad \text{ideale.} \end{array} \right.$
- (3) R ist direkte Summe von endlich vielen Idealen, die fastlokale linksartinsche Ringe sind.

Da man zeigen kann, daß ein linksartinscher Ring mit Eins,

dessen Linksideale zweiseitig sind, die in Satz C unter (3) angegebene Struktur besitzt, läßt sich mit Hilfe von Satz C das folgende Ergebnis herleiten:

SATZ D: Für einen linksnoetherschen Ring, dessen Linksideale zweiseitig sind, sind folgende Aussagen äquivalent:

- (1) $\text{ch}(M) = \text{tr}(M)$ für alle R -Linksmoduln M .
- (2) $C(M) = S(M)$ für alle R -Linksmoduln M .
- (3) R ist linksartinsch.

Dieser Satz ermöglicht es, ein Ergebnis von E. MATLIS zu verallgemeinern, das besagt, daß ein kommutativer noetherscher Ring mit Eins genau dann artinsch ist, wenn die injektiven unzerlegbaren R -Linksmoduln endlich erzeugbar sind. Es gilt nämlich:

SATZ E: Für einen linksnoetherschen Ring, dessen Linksideale zweiseitig sind, sind folgende Aussagen äquivalent:

- (1) Alle injektiven unzerlegbaren R -Linksmoduln sind endlich erzeugbar.
- (2) $\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Epimorphe Bilder von injektiven unzer-} \\ \text{legbaren } R\text{-Linksmoduln haben endliche} \\ \text{GOLDIE-Dimension.} \\ \text{(b) } R \text{ ist linksartinsch.} \end{array} \right.$

Lebenslauf

Am 12. Oktober 1941 wurde ich als Sohn des Chemikers Dr.-Ing. Robert Krause und seiner Ehefrau Auguste geb. Stagl in Frankfurt am Main geboren und verlebte hier meine früheste Kindheit. Im Dezember 1943 zog meine Familie nach Langelsheim am Harz um, wo mein Vater am 22. Februar 1947 starb. Von Ostern 1948 bis Dezember 1951 besuchte ich die Volksschule in Langelsheim, von Dezember 1951 bis Ostern 1952 die Volksschule in Frankfurt am Main. Hier wurde ich im April 1952 in die Helmholtzschule, Gymnasium für Jungen, aufgenommen, an der ich am 24. Februar 1961 die Reifeprüfung ablegte. Seit dem 25. April 1961 studierte ich Mathematik an der Johann Wolfgang Goethe-Universität zu Frankfurt am Main und bestand am 25. Februar 1964 die Vordiplomprüfung, am 15. November 1966 die Diplomprüfung. Meine Dissertation fertigte ich unter Anleitung von Herrn Professor Dr. Reinhold Baer an.

Im Laufe meines Studiums nahm ich an Vorlesungen, Seminaren und Praktika der folgenden akademischen Lehrer teil:

Prof. Dr. R. Baer, Prof. Dr. Bauer, Prof. Dr. Benz, Prof. Dr. Behrens, Prof. Dr. Bilz, Prof. Dr. Czerny, Prof. Dr. Dänzer, Privatdozent Dr. Heineken, Prof. Dr. Franz, Prof. Dr. Köthe, Prof. Dr. Martienssen, Prof. Dr. Moufang, Prof. Dr. Mrowka, Prof. Dr. Müser, Prof. Dr. Stummel, Prof. Dr. Ostrom, Prof. Dr. Salzmann, Prof. Dr. Süßmann.

